EXERCICE 1 Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC tels que $A(1;0)$, $B(9;2)$ et $C(3;8)$
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC

Corrigé

Hauteur issue de C

M est un point de la hauteur issue de C ssi $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
&\text{ssi } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\\
&\text{ssi } \begin{pmatrix} x-3 \\ y-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\\
&\text{ssi } (x-3)\times 8 + (y-8)\times 2 = 0\\
&\text{ssi } 8x - 24 + 2y - 16 = 0\\
&\text{ssi } 8x + 2y - 40 = 0\\
&\text{ssi } \boxed{4x + y - 20 = 0}
\end{aligned}$$

Hauteur issue de B

M est un point de la hauteur issue de B ssi $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
&\text{ssi } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0\\
&\text{ssi } \begin{pmatrix} x-9 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0\\
&\text{ssi } (x-9)\times 2 + (y-2)\times 8 = 0\\
&\text{ssi } 2x - 18 + 8y - 16 = 0\\
&\text{ssi } 2x + 8y - 34 = 0\\
&\text{ssi } \boxed{x + 4y - 17 = 0}
\end{aligned}$$

Coordonnées de l'orthocentre

M est l'orthocentre de ABC ssi M est à l'intersection de deux hauteurs, ses coordonnées vérifient donc simultanément les deux équations.

On résout donc le système : $\begin{cases} 4x + y - 20 = 0 \\ x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$

Cela donne $\begin{cases} 15y - 48 = 0 & \text{avec} 4L_2 - L_1 \to L_1 \\ x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$

Puis $\begin{cases} y = \frac{48}{15} = \frac{16}{5} \\ x + 4 \times \frac{16}{5} - 17 = 0 \end{cases}$

Et enfin $\begin{cases} y = \frac{16}{5} \\ x = \frac{21}{5} \end{cases}$

Les coordonnées de l'orthocentre sont alors $\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{16}{5}\right)$

Vérification graphique